Analyse Fonctionnelle - Résumé

crapito

September 5, 2021

Contents

1 Espaces Vectoriels Normés

1.1 Espaces Métriques

Déf: Complet

Un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy converge.

Déf: Banach

Un espace vectoriel complet est appelé un espace de Banach.

Thm: Série $\leftrightarrow$ Banach

Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série convergeant absolument converge.

1.2 Espaces L^p

Lemme

Soient $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors on a l'inégalité:

$$a^\lambda \cdot b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

Elle devient une égalité si et seulement si $a = b$.

Inégalité de Hölder

Soient $p \in \mathbb{R}_{>1}$, $f,\ g \in \mathcal{M}(X; \mathbb{F})$, $p \in \mathbb{R}_{>1}$ tel que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Alors:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

L'inégalité devient égalité si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que:

$$\alpha + \beta \neq 0 \qquad \alpha |f|^p = \beta |g|^q \quad \text{p.p.}$$

Inégalité de Minkowski

Soient $p \in \mathbb{R}_{>1}$ et $f, g \in L^p$. Alors:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Espaces L^p

Pour tout $p \geq 1$, l'espace vectoriel normé L^p est un espace de Banach.

Fonctions étagées

L'espace vectoriel $\mathcal{E}_{\mu<\infty}(X; \mathbb{F})$ (l'espace des fonctions étagées) est un sous-espace vectoriel dense de $L^p(X)$ pour tout $p \geq 1$.

Suprémum essentiel

Le suprémum esentiel d'un fonction $f \in \mathcal{M}(X; \bar{\mathbb{R}})$ est la valeur:

$$\text{ess sup}(f) := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \mu\big(f^{-1}(\mathbb{R}_{>a})\big) = 0\}$$

avec comme convention que $\inf \varnothing = \infty$.
Cela nous permet de définir l'espace $\tilde{L}^\infty := \{f \in \mathcal{M}(X; \mathbb{F}) \mid \|f\| < \infty\}$.

Lemme

Pour tout $f \in \tilde{L}^p(X)$, on a $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.

Propriétés de l'espace L^∞

(1) La fonction $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur L^∞.

(2) Une suite $f \in \left(L^\infty\right)^\omega$ converge dans L^∞ si et seulement si il existe un ensemble $E \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(E^c) = 0$ et f converge uniformément sur E.

(3) L^∞ est un espace de Banach.

(4) L'espace vectoriel $\mathcal{E}(X; \mathbb{F})$ des fonctions étagées est un sous-espace vectoriel dense de L^∞.

(5) Pour tous $f, g \in \mathcal{M}(X; \mathbb{F})$, on a l'inégalité:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Et si $f \in L^1$, $g \in L^\infty$, alors l'égalité tient si et seulement si $|g(x)| = \|g\|_\infty$ pour presque tout x tel que $f(x) \neq 0$.

2 Espace Dual Topologique

2.1 Continuité et linéarité

Rappel: Linéarité

Une application A est linéaire si $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$.

Equivalences sur la linéarité d'application

Soient E et F deux espaces normés et $A : E \to F$ une application linéaire. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) A est continue en tout point de E.

(2) A est continue à l'origine $0 \in E$.

(3) La norme $\|Ax\|$ est bornée sur la boule unité fermée $B_E := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.

Remarque: Une application linéaire $A : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés est continue si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Prop/Déf: Opérateur (linéaire) Borné

Une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés E et F est appelée opérateur (linéaire) borné. L'ensemble de tous les opérateurs bornés $A : E \to F$ est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}(E, F)$ ($\mathcal{L}(E)$ si $E = F$). L'application $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

est une norme appelée la norme induite par celles de E et F. L'inégalité:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \qquad \forall x \in E$$

est appelée *inégalité fondamentale*.

Thm: L'espace de Banach d'opérateurs bornés

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Alors, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme induite $\|\cdot\|$ est complet si F est complet.

2.2 Dual Topologique

Déf: Dual Topologique

Soit E un espace vectoriel normé. Une application linéaire $f : E \to \mathbb{F}$ est appelée *forme linéaire*. L'espace de Banach $\mathcal{L}(E, \mathbb{F})$ de toutes les formes linéaires continues est appelé le *dual topologique* de E et est noté E'.

Remarque: Pour une forme linéarie f sur E, l'image de $x \in E$ par f sera noté de deux façons différentes:

$$fx := f(x) =: < f, x >$$

Proposition sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé E, l'application:

$$\Re_* : (E')_{\mathbb{R}} \to (E_{\mathbb{R}})' \qquad (\Re_* f)x = \Re(fx) := \frac{1}{2}\left(fx + \overline{fx}\right)$$

est un $\mathbb{R}$-isomorphisme isométrique.

Définitions

Soit P un ensemble muni d'une relation d'orde (parielle) notée $\leq$. On dit que:

(1) Un sous-ensemble $Q \subset P$ est *totalement ordonné* si pour tout couple d'éléments $a, b \in Q$, on a soit $a \leq b$ soit $b \leq a$.

(2) Un élément $c \in P$ est *majorant* d'un sous-ensemble $Q \subset P$ si pour tout $a \in Q$, on a $a \leq c$.

(3) P est *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné de P possède un majorant.

(4) Un élément $m \in P$ est *maximal* si pour tout $x \in P$ tel que $m \leq x$ on a nécessairement $x = m$.

(Lemme admis equivalent à l'axiome du choix.)
Lemme de Zorn

Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, possède (au moins) un élément maximal.

Théorème de Hahn-Banach, forme analytique

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $G \subset E$ un sous-espace vectoriel et $g: G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que:

$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in G$$

où $p: E \to \mathbb{R}$ est une application telle que

(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$

(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$

Alors, il existe une forme linéarie $f: E \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in G$$

et

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in E$$

Remarque: On peut interpréter ce Théorème comme l'existence d'une prolongation analytique de la forme g sur E. En effet $f = g$ sur G. De plus la prolongation f préserve $g \leq p$ (donc $f \leq p$).

Applications de Hahn-Banach

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

(1) Soient $G \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé et $u \in E \setminus G$. Alors, il existe un élément $f \in E'$ tel que $\|f\| = 1$, $f\,|_G = 0$ et
$$f(u) = \delta := \inf_{x \in G} \|x - u\| > 0$$

(2) Pour tout $u \in E_{\neq 0}$, il existe un élément $f \in E'$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(u) = \|u\|$.

(3) Pour tout couple d'éléments $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe un élément $f \in E'$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x) \neq f(y)$.

(4) Pour tout $x \in E$, la forme linéaire $\iota(x): E' \to \mathbb{R}$ définie par $\iota(x)(f) = f(x)$ est continue avec la norme induite $\|\iota(x)\| = \|x\|$. Notamment, on a une inclusion linéaire isométrique d'espaces vectoriels normés

$$\iota: E \to E'' := (E')'$$

Remarques:

- Le théorème implique que
$$\|x\| = \|\iota(x)\| = \sup_{f \in E'_{\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \max_{f \in E'_{\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

- Comme E'' est un espace de Banach et $\iota(E) \subset E''$ est un sous-espace vectoriel, l'adhérence $\overline{\iota(E)}$ est un espace de Banach avec un sous-espace vectoriel dense $\iota(E)$. En particulier, on a $\overline{\iota(E)} = \iota(E)$ si E est un espace de Banach. On dit que E est *réflexif* si $\iota(E) = E''$.

Opérateurs adjoints

Proposition et définition

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $A : E \to F$ un opérateur linéaire borné. *L'opérateur adjoint* de A est l'application linéarie $A^* : F' \to E'$ définie par

$$(A^*g)(x) = g(Ax) \qquad \forall g \in F',\ \forall x \in E$$

qui est continue avec la norme $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Thm

Soient deux espaces vectoriels normés E, F et $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\|A\| = \|A^*\|$.

Remarque: L'application adjointe $(\cdot)^* : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F', E')$ est une inclusion isométrique d'espaces vectoriels normés.

Dans le cas particulier avec $F = F' = \mathbb{F}$, on a $\mathcal{L}(E, F) = E'$ et l'application adjointe $(\cdot)^* : E' \to \mathcal{L}(\mathbb{F}, E')$ est l'isomorphisme naturel qui associe à tout élément $f \in E'$ l'opérateur borné $f^* : \mathbb{F} \to E'$ défini par $f^*\lambda = \lambda f \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$.

Dans l'autre cas particulier avec $E = E' = \mathbb{F}$, on a les identifications $\mathcal{L}(E, F) \simeq F$ et $\mathcal{L}(F', E') = F''$ alors que l'application adjointe se réduit à l'inclusion canonique $(\cdot)^* = \iota_F : F \to F''$.

2.3 Interpretation géométrique

Déf: Hyperplan (affine)

Soit E un espace vectoriel. Un *hyperplan (affine)* de E est un sous-ensemble de E de la forme

$$H = x + G := \{x + y \mid y \in G\} \quad x \in E$$

où G est un sous-espace vectoriel de E de co-dimension 1, c'est-à-dire $\dim E/G = 1$. On dit que H (resp. G) est le *translaté* de G (resp. H) par x (resp. $-x$).

Déf: Ker/Image

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. On définit

$$K(f) := \operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(0) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

et

$$I(f) := f^{-1}(1) = \{x \in E \mid f(x) = 1\}$$

Remarque: Pour tout $a \in \mathbb{F}_{\neq 0}$, l'ensemble $f^{-1}(a)$ s'identifie avec $I(a^{-1}f)$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel.

(1) Pour toute forme linéaire non nulle $f : E \to \mathbb{F}$, l'ensemble $K(f)$ est un sous-espace vectoriel de E de co-dimension 1. Notamment, pour tout $x_0 \in E \setminus K(f)$ on a $E = K(f) + \mathbb{F}x_0$, c'est-à-dire pour tout $x \in E$ is existe un unique couple $(y, \lambda) \in K(f) \times \mathbb{F}$ te que $x = y + \lambda x_0$.

(2) L'ensemble $I(f)$ est un hyperplan de E contenu dans $E_{\neq 0} := E \setminus \{0\}$ et qui est donné par le translaté de $K(f)$ par un élément de $I(f)$.

(3) Soient $f, g : E \to \mathbb{F}$ deux formes linéaires non nulles. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{F}_{\neq 0}$ tel que $f = \lambda g$ si et seulement si $K(f) = K(g)$.

(4) L'application $f \mapsto I(f)$ est une bijection entre l'ensemble de formes linéaires non nulles sur E et l'ensemble d'hyperplans de E contenus dans $E_{\neq 0}$.

Corollaire

Tout hyperplan de E est un sous-ensemble de la forme $f^{-1}(a)$ où $a \in \mathbb{F}$ et $f : E \to \mathbb{F}$ est une forme linéaire non nulle.

Déf: Nulle part dense

Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *nulle part dense (ou rare)* dans X si l'intérieur de l'adhérence de A est vide.

Thm: Hyperplan

Soient E un espace vectoriel normé et $H = f^{-1}(a)$ un hyperplan de E. Alors, les conditions suivantes sont équivalents:

(i) La forme linéarie f est continue.

(ii) H est fermé.

(iii) H est nulle part dense dans E.

(iv) H n'est pas dense dans E.

Corollaire

Soit E un espace vectoriel normé. L'application $f \mapsto I(f)$ est une bijection entre l'ensemble $E'_{\neq 0}$ des formes linéaires continues non nulles sur E et l'ensemble des hyperplans fermés de E contenus dans $E_{\neq 0}$.

2.4 Formes géométriques de Hahn-Banach

Déf: Sépaer

Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel E. On dit qu'un hyperplan $H = f^{-1}(a)$ de E *sépare* A et B s'il existe $\varepsilon \geq 0$ tel que

$$f(x) + \varepsilon \leq a \leq f(y) - \varepsilon \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B$$

Si $\varepsilon = 0$ (respectivement $\varepsilon > 0$), alors on dit que H sépare A et B au sens *large* (respectivement *strict*).

Proposition/Définition: Jauge

Soit C un sous-ensemble convexe ouvert d'un espace vectoriel normé E avec $0 \in C$. Alors, la *jauge* de C est l'application

$$p: \ E \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ p(x) = \inf\{t \in \mathbb{R}_{>0} \mid t^{-1}x \in C\}$$

qui possède les propriétés suivantes:

(1) Il existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $p(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$.

(2) $p^{-1}\big([0,1[\big) = C$.

(3) $p(tx) = tp(x) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_{>0} \times E$.

(4) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$.

Lemme: Separation d'hyperplan

Soit C un sous-ensemble convexe ouvert non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E. Alors pour tout $u \in E \setminus C$, il existe $f \in E'$ tel que

$$f(x) < f(u) \qquad \forall x \in C$$

En particulier, le hyperplan fermé $f^{-1}\big(f(u)\big)$ sépare C et $\{u\}$ au sens large.

Thm: Hahn-Banach, première forme géométrique

Soient A et B deux parties convexes non vides d'un espaces vectoriel normé E telles que $A \cap B = \varnothing$ et A est ouverte. Alors, il existe un hyperplan fermé de E qui sépare A et B au sens large.

Thm: Hahn-Banach, deuxième forme géométrique

Soient A et B parties convexes non vides d'un espace vectoriel normé E telles que $A \cap B = \varnothing$, A est fermée et B est compacte. Alors, il existe un hpyerplan fermé de E qui sépare A et B au sens strict.

3 Théorème de Baire et ses applications

Déf: Espace de Baire

Un espace topologique est dit *espace de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Thm: Baire

Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

Proposition

Soit X un espace de Baire. Alors, pour toute suite de fermés $F \in \big(\mathcal{P}(X)\big)^{\omega}$ telle que $X = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, il existe F_{n_0} d'intérieur non vide.

Thm: Banach-Steinhaus

Soient E, F deux espaces vectoriels normés avec E complet et $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}(E, F)$ une famille telle que

$$\sup_{T\in\mathcal{U}} \|Tx\| < \infty \qquad \forall x \in E$$

Alors $\sup_{T\in\mathcal{U}} \|T\| < \infty$.

Corollaire

Soit B un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé E tel que l'ensemble $f(B)$ est borné pour tout $f \in E'$. Alors, B est borné.

3.1 Thm de l'application ouverte

Déf: Application ouverte

Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite *ouverte* si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.

Thm de l'application ouverte

Toute application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach est une application ouverte.

Lemme

Une application linéaire $T : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés est ouverte si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_F(0, \varepsilon) \subset T\big(B_E(0, 1)\big)$.

3.2 Théorème du graphe fermé

Déf: Graphe

Le *graphe* d'un opérateur linéaire $T : E \to F$ entre deux espaces vectoriels est le sous-espace vectoriel $G(T)$ de $E \times F$ défini par

$$G(T) := \big\{(x, Tx) \mid x \in E\big\}$$

Thm du graphe fermé

Un opérateur linéaire $T : E \to F$ entre deux espaces de Banach est borné si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace vectoriel $E \times F$ muni de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Tips: Pour checker que le graphe est fermé on peut juste prendre (x_n, Tx_n) une suite dans $G(T) \subset E \times F$ qui converge vers (x, y) et montrer que $y = Ax$.

4 Espaces de Hilbert

Déf: Produit scalaire

Un *produit scalaire (hermitien à gauche)* sur un $\mathbb{F}$-espace vectoriel E est une application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{F}$ qui est

(1) Symétrique (hermitienne): $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle} \qquad \forall x, y \in E$.

(2) Linéaire relativement au second argument:

$$\langle x \mid y + \lambda z \rangle = \langle x \mid y \rangle + \lambda \langle x \mid z \rangle \qquad \forall (x, y, z, \lambda) \in E^3 \times \mathbb{F}$$

(3) Définie positive $\langle x \mid x \rangle > 0 \qquad \forall x \in E_{\neq 0}$.

Proposition: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Alors, pour tous $x, y \in E$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \langle x \mid y \rangle \right| \leq \sqrt{\langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle}$$

Identité du parallélogramme

Note: Vrai pour tout espace de Hilbert !

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Théorème de Pythagore

$$(x \in \mathcal{H}^n, \ \langle x_i \mid x_j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j) \implies \left\| \sum_{i \in n} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in n} \|x_i\|^2$$

4.1 Décompositions orthogonales

Déf: L'orthogonal

Soit $S \subset H$ un sous-ensemble d'un espace préhilbertien. L'ensemble $S^\perp := \{x \in H \mid \langle x \mid y \rangle = 0 \quad \forall y \in S\}$ est appelé *l'orthogonal* de S.

Remarque: Si on suppose que $\varphi \in S^\perp \cap S$ on obtient

$$\forall x \in S \quad \langle \varphi \mid x \rangle = 0, \ \varphi \in S \implies \langle \varphi \mid \varphi \rangle = 0 \implies \varphi = 0$$

Thm: Décomposition orthogonale

Soie $G \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert. Alors son oorthogonal $G^\perp$ est un *supplémentaire topologique* de G, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel fermé de H tel que

(1) $G \cap G^\perp = \{0\}$

(2) $G + G^\perp = H$

De plus, dans la décomposition $z = x + y$ les éléments $x \in G$ et $y \in G^\perp$ sont tels que

$$\operatorname{dist}(z, G) = \|z - x\| \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(z, G^\perp) = \|z - y\|$$

4.2 Théorème de représentation de Riesz

Déf: Semi-linéaire

Une application $f: E \to F$ entre deux $\mathbb{F}$-espaces vectoriels est dite *semi-linéaire* si elle vérifie la condition

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \bar{\lambda} f(y) \qquad \forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{F}$$

Un *isomorphisme semi-linéaire* est une bijection semi-linéaire.

Thm: Représentation de Riesz

Pour tout espace de Hilbert H, l'application $\rho : H \to H'$ définie par $\rho(x)y = \langle x \mid y \rangle$ est un isomorphisme semi-linéaire isométrique.

Corollaire

Tout espace de Hilbert est réflexif.

4.3 Bases de Hilbert

Déf: Base Hilbertienne

Une famille orthonormale A dans un espace de Hilbert est appelée *base de Hilbert* ou *base hilbertienne* si elle est maximale dans le sens que son orthogonal est trivial $A^\perp = \{0\}$.

Exo

Une famille orthonormale $A \subset H$ d'un espace de Hilbert est une base de Hilbert si et seulement si le sous-espace vectoriel de H engendré par A est dense dans H.

Inégalité de Bessel

Pour toute famille orthonormale $A \subset H$ d'un espace préhilbertien et tout élément $x \in H$, on a l'inégalité de Bessel

$$\sum_{u \in A} |\langle u \mid x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

En particulier, l'ensemble $A_x := \{u \in A \mid \langle u \mid x \rangle \neq 0\}$ est au plus infini dénombrable.

(Admis sans démo)

Équivalent à l'axiome du choix

Pour tout ensemble infini S, on a l'égalité $\mathrm{card}(S \times S) = \mathrm{card}(S)$.

Thm

Pour toute famille orthonormale $A \subset H$ d'un espace de Hilbert, les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(i) A est une base de Hilbert.

(ii) $\forall x \in H,\ x = \sum_{u \in A_x} \langle u \mid x \rangle u$ (série de Fourier).

(iii) $\forall x \in H,\ \sum_{u \in A} |\langle u \mid x \rangle|^2 = \|x\|^2$ (égalité de Parseval).

Déf: Isomorphisme unitaire

Une bijection linéaire entre deux espaces de Hilbert $T:\ H \to L$ est dite isomorphisme unitaire si

$$\langle Tx \mid Ty \rangle = \langle x \mid y \rangle \qquad \forall x, y \in H$$

Note: Importance est fournie sur le mot bijection, il faut faire attention à trouver l'inverse.

Thm

Soit $B \subset H$ une base de Hilbert d'un espace de Hilbert. Alors, l'application

$$U:\ H \to \ell^2(B), \quad (Ux)_b = \langle b \mid x \rangle$$

est un isomorphisme unitaire.

5 Topologies Faibles

Déf: Topologie initiale

Soient X un ensemble et

$$\mathcal{F} = \{f:\ X \to Y_f\}$$

une famille d'applications chacune définie sur X et à valeurs dans un espace topologique. La topologie sur X engendrée par le sous-ensemble

$$\beta_{\mathcal{F}} := \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \left\{ f^{-1}(U) \mid U \in \tau_{Y_f} \right\} \subset \mathcal{P}(X)$$

est appelée la *topologie initiale engendrée par la famille* $\mathcal{F}$ et notée $\sigma(X, \mathcal{F})$. C'est la plus petite topologie sur X pour laquelle toute application de la famille $\mathcal{F}$ est continue.

Propriété universelle de la topologie initiale

Soient X un ensemble muni d'une topologie initiale $\sigma(X, \mathcal{F})$ et Z un espace topologique. Alors une application $g:\ Z \to X$ est continue si et seulement si l'application composée $f \circ g:\ Z \to Y_f$ est continue pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Proposition: Convergeance

Une suite $x \in X^\omega$ converge vers $a \in X$ pour une topologie initiale $\sigma(X, \mathcal{F})$ si et seulement si la suite $f(x) := \big(f(x_n)\big)_{n \in \omega}$ converge vers $f(a)$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Rappel: Dans la suite, le cours à été simplifié pour compréhension et on suppose que tous les espaces vectoriels sont sur le corps de base des nombres réels $\mathbb{R}$.

Déf: Topologie Faible

La topologie faible sur un espace vectoriel normé E est la topologie initiale $\sigma(E, E')$ engendrée par la famille de toutes les formes linéaires continues sur E.

Note: Pour tout ouvert de la topologie faible $U \subset E$ et tout $x \in U$, il existe un sous-ensemble fini $\alpha \subset E'$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$x \in V_{\alpha,\varepsilon} := \bigcap_{f \in \alpha} f^{-1}\big(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\big) = \big\{ y \in E \mid |f(x - y)| < \varepsilon \quad \forall f \in \alpha \big\} \subset U$$

Aussi, $x_n \longrightarrow a \in E$ faiblement implique que $\forall f \in E'$

$$f(x_n) \longrightarrow f(a)$$

En contraste, $x_n \longrightarrow a \in E$ fortement implique que $\|x_n\|_E \longrightarrow \|a\|_E$

Prop

La topologie faible est séparée

Propriété universelle

$$T:\ X \to Y \quad \text{continue} \qquad \Longleftrightarrow\ f \circ T:\ X \to \mathbb{R} \quad \text{continue} \quad \forall f \in Y'$$

Donc en particulier $f \circ T$ norme-continue $\implies$ continuité faible car $\sigma(X, X') \subset$ topologie $\|\cdot\|$ sur X.

Thm

Un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé est (fortement) fermé si et seulement s'il est faiblement fermé.

Corollaire

Pour tout espace vectoriel normé E, la boule unité fermée $B_E := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ est fermée pour la topologie faible.

Déf: Topologie faible-$*$

La topologie faible-$*$ sur le dual topologique E' d'un espace vectoriel normé E est la topologie initiale $\sigma(E', E)$ engendrée par la famille $\iota(E)$ où $\iota:\ E \to E''$ est l'inclusion isométrique canonique.

Note: Pour tout ouvert $U \subset E'$ de la topologie faible-$*$ et tout $f \in U$, il existe un sous-ensemble fini $\alpha \subset E$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$f \in V_{\alpha,\varepsilon} := \bigcap_{x \in \alpha} \iota^{-1}\big(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\big) = \big\{g \in E' \mid |f(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \forall x \in \alpha\big\} \subset U$$

Supplément sur la convergence: $f_n \in E'$, on dit que $f_n \longrightarrow f$ pour la topologie faible-$*$ si et seulement si

$$\iota_x f_n \longrightarrow \iota_x f \iff f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in E$$

Proposition

La topologie faible-$*$ est séparée.

Thm: Goldstine

Soit $\iota:\ E \to E''$ l'inclusion isométrique canonique d'un espace vectoriel normé E dans son bidual topologique. Alors $\iota(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible-$*$.

Thm: Kakutani

Un espace de Banach est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est compacte pour la topologie faible.

Corollaire

Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si son dual topologique E' est réflexif.

Note: Tout espace de Hilbert est réflexif.

Thm: Alaoglu

La boule unité fermée du dual topologique d'un espace vectoriel normé est compacte pour la topologie faible-$*$.

6 Série tips:

Hölder inégalité

On peut poser:

$$\|f^p\|_1 = \|f\|_p^p$$

Utile pour introduire l'inégalité de Hölder des fois.

Dans un espace métrique fini d'ailleurs: $a \leq b \leq \infty$

$$\|f\|_a \leq \|f\|_b \cdot \mu(X)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

Et pour:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \implies \|fg\|_c \leq \|f\|_a \|g\|_b$$

Completude d'un espace

Si S est un espace métrique complet et $G \subset S$ un sous-espace. Alors

$$G \quad \text{est fermé} \quad \iff G \quad \text{est complet}$$

Sur la norme d'opérateur et les hyperplans

$$\frac{1}{\|f\|} = \inf_{y \in I(f)} \|y\|$$

Sur les espaces ℓ^p

La différence de 2 terme est toujours plus petite que la norme p, i.e.:

$$x, y \in \ell^p \implies |x_n - y_n| \leq \|x - y\|_p$$

Sur les différentes topologies

E muni de la topologie faible $(\sigma(E, E'))$ est une topologie telle que E' sont continues.
E'' muni de la topologie faible-$*$ $(\sigma(E'', E'))$ est une topologie telle que E' sont continues aussi.

Dual de L^p: On peut définir un isomorphisme linéaire entre $L^q \longrightarrow (L^p)'$ avec

$$I : L^q \to (L^p)' \quad I(g)(f) := \int gf \, d\mu \quad \forall g \in L^q, \forall f \in L^p$$

Où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On peut facilement montrer que I est linéaire continue et que $\|I\| \leq 1$. Pour montrer que I est un isomorphisme et que $\|I\| = 1$ il faut travailler un peu plus. Pour tout $f \in L^p$, il existe $g \in L^q$

$$\|f\|_p = \left| \int_X f \cdot g \, d\mu \right|$$

On peut même définir:

$$g(x) = \begin{cases} \|f\|_p^{1-p} \frac{|f(x)|^p}{f(x)} & f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et alors $\|g\|_q = 1$ ce qui nous permet de montrer avec un peu de travail que $\|I\| = 1$.

Borne

Peut être très utile le théorème:
Si $B \subset E$ est tel que $f(B)$ est borné $\forall f \in E'$, alors B est borné dans E.